Théorème de Carathéodory.

Thm : Soient $\mathcal{E}$ espace affine de dimension finie, d'espace vectoriel associé $\vec{E}$, $A \subset \mathcal{E}$.
Tout élément de $Cv(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A, avec $k \leq 1 + \dim \mathcal{E}$.

Soit $M = \sum_{i=1}^{k} t_i A_i \in Cv(A)$ avec $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ et $A_i \in A$.
Supposons que $k > 1 + \dim \mathcal{E}$.
Par conséquent $(\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_k})$ est liée : $\exists \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{A_1A_k} = \vec{0}$.
Posons $\mu_1 = \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, $\mu_i = -\lambda_i$ pour $i \in \{2, \dots, k\}$.
En fixant O quelconque : $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.
Les λ_i étant non tous nuls, les μ_i aussi et puisque $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$, $\exists i_0, \mu_{i_0} > 0$.
Soit $\lambda = \min \left\{ \frac{t_i}{\mu_i}, \mu_i > 0 \right\}$. Posons $v_i = t_i - \lambda \mu_i$. On a $\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} v_i = 1 \\ v_i \geq 0, \forall i \end{cases}$
De plus, $\exists k_0$, $\lambda = \frac{t_{k_0}}{\mu_{k_0}}$, i.e. $v_{k_0} = 0$.
De là, $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i \neq k_0} v_i \overrightarrow{OA_i} + \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i \neq k_0} v_i \overrightarrow{OA_i}$
Donc M est combinaison convexe de $(k-1)$ points. En itérant, le résultat vient.

Cor : · Si A est compact, alors $Cv(A)$ est compacte.
· Si A est borné, alors $Cv(A)$ est bornée et $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(Cv(A))$.

· Soit $n = \dim \mathcal{E}$. Posons $S = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}, t_1 + \dots + t_{n+1} = 1\}$.
Soit $f : \begin{array}{rcl} S \times \mathcal{E}^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ ((t_i), (A_i)) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} t_i A_i \end{array}$ Par Carathéodory, $f(S \times A^{n+1}) = Cv(A)$.
Par continuité de f, $S \times A^{n+1}$ étant compact, $Cv(A)$ est compacte.

· $A \subseteq Cv(A)$ donc $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(Cv(A))$.
De plus, A borné, donc $A \subset B(A, r)$, puis $Cv(A) \subset B(A, r)$ bornée.
Soit $M = \sum_{i=1}^{k} t_i A_i \in Cv(A)$ avec $(t_i) \in S$.
* Si $N \in A$, $MN \leq \sum_{i=1}^{k} t_i A_i N \leq \mathrm{diam}(A) \sum_{i=1}^{k} t_i = \mathrm{diam}(A)$.
* Si $N \in Cv(A)$, $MN \leq \sum_{i=1}^{k} t_i A_i N \leq \mathrm{diam}(A) \sum_{i=1}^{k} t_i = \mathrm{diam}(A)$

car ici $A_i \in A$, $N \in Cv(A)$.

De là, $\mathrm{diam}(Cv(A)) = \mathrm{diam}(A)$

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Thm : Soit V un $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Soit K compact convexe non vide de V.
Soit G un sous-groupe compact de $GL(V)$ tq $\forall u \in G,\ u(K) \subset K$. $\exists x \in K, \forall u \in G, u(x) = x$

· Soit N norme euclidienne sur V. Soit $\nu : x \in V \mapsto \max_{u \in G} N(u(x))$, bien déf par compacité de G. $\in \mathbb{R}_+$.

$*$ $\nu(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$*$ $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x)$ car les éléments de G sont linéaires et N norme.

$*$ $\nu(x+y) = N(u_0(x+y)) \leq N(u_0(x)) + N(u_0(y)) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

$*$ $\forall u \in G,\ \nu(x) = \nu(u(x))$ car u bijection.

Ainsi, ν définit une norme G-invariante sur V.

· Soit $a \in K$ tq $\nu(a) = \min_K \nu$. Soit $u \in G$. $[\nu(u(a)) = \nu(a)]$.

On a $\nu\left(\frac{u(a)+a}{2}\right) \underset{\text{par convexité}}{=} \nu(a)$, donc $\nu(u(a)+a) = 2\nu(a) = \nu(a) + \nu(u(a))$, donc $u(a) \underset{\text{cas d'égalité de IT.}}{=} \lambda a$

Or $\nu(u(a)) = \nu(a)$ donc $\lambda = 1$ ou $a = u(a) = 0$. $\forall u \in G,\ u(a) = a$.

Cor : Soit G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. $G \subset O(q)$ avec q déf positive.

Soit $\square : (A, B) \mapsto A \square B = BA$. $\square$ munit G d'une nouvelle structure de groupe.

Soit $\rho : (G, \square) \longrightarrow GL(S_n(\mathbb{R}))$, $A \longmapsto (S \mapsto {}^tASA)$, bien défini car $\rho(A)^{-1} = \rho(A^{-1})$, morphisme de grps

· ρ est continue par (bi)linéarité et dimension finie.

$\rho(G)$ est un sous-groupe compact de $GL(S_n(\mathbb{R}))$

Soit $K = Cv(H = \{{}^tMM, M \in G\})$. H compact, puis par Carathéodory, K compact.

$H \subset S_n^{++}$ donc $K \subset S_n^{++}$ par convexité de S_n^{++}.

De plus, $\rho(A)({}^tM M) = {}^t(MA) MA \in H \subset K$ donc K est stable par $\rho(A)$

Ainsi, par le thm précédent, $\exists S \in K \subset S_n^{++}, \forall A \in G,\ \rho(A)(S) = {}^tASA = S$.

$q_S : x \mapsto {}^tx Sx$. $G \subset O(q_S)$.